BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л.А.РУСТАМОВА
Институт Прикладной Математики БГУ

В работе найдены условия регулярной разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения второго порядка, главная часть которого содержит нормальный оператор, а спектр расположен в некотором секторе.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H операторно-дифференциальное уравнение

$$Pu = -\frac{d^2u}{dt^2} + \rho(t)A^2u + A_1\frac{du}{dt} + A_2u = f(t), \quad t \in R_+, \tag{1}$$

с краевым условием

$$u'(0) = 0 , \tag{2}$$

где $f(t) \in L_2(R_+;H)$, $u(t) \in W_2^2(R_+;H)$, пространство $L_2(R_+;H)$ определяется как в [1], а подпространство $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$ есть подпространство гильбертова пространства $W_2^2(R;H)$, причем $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1) = \left\{u \,\middle|\, u \in W_2^2(R_+;H), u'(0) = 0\right\}$, пространство $W_2^2(R_+;H)$ тоже определяется как в [1], числовая функция $\rho(t) = \alpha^2$ при $t \in (0,1)$ и $\rho(t) = \beta^2$ при $t \in (1,\infty)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, а операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

1) A – нормальный обратимый оператор, спектр которого содержится в угловом секторе
$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg\lambda| \le \varepsilon\}, \ 0 \le \varepsilon < \pi/2 ;$$
2) Операторы $B_j = A_jA^{-j}$ $(j = 1,2)$ ограничены в H.

Определение 1. Если при любом $f(t) \in L_2(R_+;H)$ существует вектор-функция, $u(t) \in W_2^2(R_+;H)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в $R_+ = (0,\infty)$ и граничному условию (2) в смысле

$$\lim_{t\to+0}\|u'(t)\|_{1/2} = 0 ,$$

то ее будем называть регулярным решением задачи (1),(2), а задачу (1),(2) будем называть регулярно разрешимой.

Для нахождения условия разрешимости задачи (1),(2) её запишем в виде уравнения

$$Pu \equiv P_0 u + P_1 u = f \ , \tag{3}$$

где $f(t) \in L_2(R_+;H)$, $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$,

$$P_0 u = -\frac{d^2 u}{dt^2} + \rho(t) A^2 u \tag{4}$$

и

$$P_1 u = A_1 \frac{du}{dt} + A_2 u \quad . \tag{5}$$

Сперва исследуем регулярно разрешимость уравнения

$$P_0 u = f \quad . \tag{6}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть выполнено условие 1) . Тогда оператор P_0 изоморфно отображает пространство $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$ на пространство $L_2(R_+;H)$.

Доказательство. Сперва покажем, что область значений оператора P_0 совпадает с пространством $L_2(R_+;H)$, т.е. уравнение (6) имеет всегда решение из пространства $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$. Мы показали (см. [2] и [3]), что вектор - функции

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\zeta^2 E + \alpha^2 A^2\right)^{-1}\left(\int_0^{+\infty} f(s) e^{i(t-s)\zeta} ds\right) d\zeta$$

и

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\zeta^2 E + \beta^2 A^2\right)^{-1}\left(\int_0^{+\infty} f(s) e^{i(t-s)\zeta} ds\right) d\zeta$$

удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha^2 A^2 u = f(t)$$

и

$$-\frac{d^2 u}{dt^2} + \beta^2 A^2 u = f(t),$$

соответственно, в R и принадлежат пространству $W_2^2(R;H)$. Обозначим через $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ сужения этих вектор - функций в $(0,1)$ и $(1,\infty)$, соответственно. Тогда очевидно, что $\psi_1(t) \in W_2^2(0,1)$, $\psi_2(t) \in W_2^2(1,\infty)$. Применяя теорему о следах, получаем, что существуют граничные значения $\psi_1(0)$,

$\psi_1'(0)$, $\psi_2(1), \psi_2'(1)$, причем $\psi_1'(0) \in H_{3/2}$, $\psi_1(1) \in H_{3/2}$, $\psi_2(1) \in H_{3/2}$, $\psi_2'(1) \in H_{1/2}$, а $\psi_1'(0) \in H_{1/2}, \psi_1'(1) \in H_{1/2}$.

Теперь построим вектор-функцию

$$u(t) = \begin{cases} \theta_1(t) = \psi_1(t) + e^{-\alpha t A}\varphi_1 + e^{-\alpha(1-t)A}\varphi_2 \ , & t \in (0,1), \\ \theta_2(t) = \psi_2(t) + e^{\beta A(1-t)}\varphi_3 \ , & t \in (1,\infty), \end{cases}$$

где e^{-At} - ограниченная непрерывная полугруппа, порожденная оператором $-A$, а векторы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in H_{3/2}$ подлежат определению. Очевидно, что в этих предположениях

$$e^{-\alpha At}\varphi_1 + e^{-\alpha(1-t)A}\varphi_2 \in W_2^2((0;1);H), \quad e^{\beta A(t-1)}\varphi_3 \in W_2^2((1,\infty);H).$$

Чтобы было $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$, вектор-функция $u(t)$ должна удовлетворять условиям :

$$u'(0) = 0 \ , \theta_1(1) = \theta_2(1) \ , \theta_1'(1) = \theta_2'(1).$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} \psi_1'(0) - \alpha A\varphi_1 + \alpha A e^{-\alpha A}\varphi_2 = 0, \\ \psi_1(1) + e^{-\alpha A}\varphi_1 + \varphi_2 \ = \psi_2(1) + \varphi_3 \ , \\ \psi'_1(1) - \alpha A e^{-\alpha A}\varphi_1 + \alpha A\varphi_2 \ = \psi_2'(1) - \beta A\varphi_3 \ . \end{cases}$$

Относительно φ_1, φ_2 и φ_3 получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha A\varphi_1 - \alpha A e^{-\alpha A}\varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 = \psi_1(0) \ , \\ e^{-\alpha A}\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \psi_2(1) - \psi_1(1) \ , \\ -\alpha e^{-\alpha A}\varphi_1 + \alpha\varphi_2 + \beta\varphi_3 = A^{-1}(\psi_2'(1) - \psi_1'(1)) \ . \end{cases}$$

Основным операторным определителем этой векторный системы является:

$$\Delta_0(A) = \begin{pmatrix} \alpha A & -\alpha A e^{-\alpha A} & 0 \\ e^{-\alpha A} & E & -E \\ -\alpha e^{-\alpha A}E & \alpha E & \beta E \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\Delta_0(A)$ обратим в $H^3 = H \times H \times H$. Обозначим

$$\Delta_0(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha\sigma & -\alpha\sigma e^{-\alpha\sigma} & 0 \\ e^{-\alpha\sigma} & 1 & -1 \\ -\alpha e^{-\alpha\sigma} & \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

где $\sigma \in S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \le \varepsilon\}$, $0 \le \varepsilon < \pi/2$, $\operatorname{Re}\lambda \ge \mu_0 > 0$. Очевидно, что при $\sigma \to \infty$ $(\sigma \in S_\varepsilon$, $\operatorname{Re}\sigma \ge \mu_0 > 0)$,

$$\Delta_0(\sigma)=\begin{pmatrix}\alpha\sigma & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & \alpha & \beta\end{pmatrix}+0(\sigma),\ \ \sigma\to\infty\,.$$

Тогда при $\sigma\to\infty$

$$\left|\det\Delta_0(\sigma)\right|=\left|\det\alpha\sigma\begin{pmatrix}1 & -1\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}\right|+0(\sigma)=\alpha\sigma\left|\alpha+\beta\right|+0(\sigma)\,,$$

т.е. при $\sigma\to\infty$ $\Delta_0(\sigma)$ обратим и $\left|\det\Delta_0(\sigma)\right|\neq 0$. Покажем, что при $\sigma\in S_\varepsilon$ и $\left|\sigma\right|\le M>0$ имеет место соотношение $\left|\det\Delta_0(\sigma)\right|\neq 0$. Так как

$$\det\Delta_0(\sigma)=\begin{vmatrix}\alpha\sigma & \alpha\sigma e^{-\alpha\sigma} & 0\\ e^{-\alpha\sigma} & 1 & -1\\ -\alpha\, e^{-\alpha\sigma} & \alpha & \beta\end{vmatrix}=\alpha\sigma\begin{vmatrix}1 & -1\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}-\alpha\sigma e^{-\alpha\sigma}\begin{vmatrix}e^{-\alpha\sigma} & -1\\ -\alpha e^{-\alpha\sigma} & \beta\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha\sigma\left[\begin{vmatrix}1 & -1\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}-\alpha\sigma e^{-2\alpha\sigma}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -\alpha & \beta\end{vmatrix}\right]=\alpha\sigma\left[(\alpha+\beta)-e^{-2\alpha\sigma}(\alpha+\beta)\right]=\alpha\sigma(\alpha+\beta)(1-e^{-2\alpha\sigma}),$$

то

$$\operatorname{Re}\Delta_0(\sigma)=\alpha\sigma(\alpha+\beta)(1-e^{-2\alpha\operatorname{Re}\sigma})\ge\alpha\sigma(\alpha+\beta)(1-e^{-2\alpha\mu_0})>const>0\,,$$

где $\sigma\in S_\varepsilon$, $\operatorname{Re}\sigma\ge\mu_0$. Таким образом, $\Delta_0(\sigma)\neq 0$, поэтому он обратим при всех $\sigma\in\sigma(S_\varepsilon)$, тем более, $\Delta_0(\sigma)$ обратим при $\sigma\in\sigma(A)$. Найдем обратную матрицу

$$\Delta_0^{-1}(\sigma)=\begin{pmatrix}a_{11}(\sigma) & a_{12}(\sigma) & a_{13}(\sigma)\\ a_{21}(\sigma) & a_{22}(\sigma) & a_{23}(\sigma)\\ a_{31}(\sigma) & a_{32}(\sigma) & a_{33}(\sigma)\end{pmatrix}\frac{1}{\det\Delta_0(\sigma)}\,,$$

где $a_{ij}(\sigma)$ миноры в матрице, отвечающие элементу, стоящему в j-ой строке и i-ом столбце. Так как каждый элемент $\Delta_0(\sigma)$ ограничен в S_ε , а $\left|\det\Delta_0(\sigma)\right|\ge const>0$, то считая, что $\sigma\in S_\varepsilon\cap\sigma(A)$, мы из спектральной теории нормальных операторов получаем, что оператор $\Delta_0^{-1}(A)$ существует и ограничен в H^3.

Таким образом, мы можем определить векторы $\varphi_1,\varphi_2\ ,\varphi_3$. Для определения φ_j $(j=1,2,3)$ в j–ой строке $\Delta_0^{-1}(\sigma)$ запишем векторы $-\psi_1(0)\in H_{3/2}$, $(\psi_2(1)-\psi_1(1))\in H_{3/2}$, $A^{-1}(\psi_2'(1)-\psi_1'(1))\in H_{3/2}$ и формально найдем полученный определитель, а затем σ заменим оператором A и получим выражения для φ_j. Отсюда видно, что φ_j будет линейной комбинацией образов векторов $-\psi_1(0)\in H_{3/2}$, $(\psi_2(1)-\psi_1(1))\in H_{3/2}$ и $A^{-1}(\psi_2'(1)-\psi_1'(1))\in H_{3/2}$ после действия ограниченными операторами. Поэтому $\varphi_j \in H_{3/2}$ $(j = 1,2,3)$. Таким образом, $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+; H;1)$.

Теперь покажем, что уравнение $P_0 u = 0$ имеет только нулевое решение из $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+; H;1)$. Действительно, это уравнение равносильно граничной задаче

$$-\frac{d^2u}{dt^2} + \rho(t)A^2u = 0 \quad , \tag{7}$$

$$u'(0) = 0 \quad , \tag{8}$$

где $u(t) \in W_2^2(R_+; H)$.Общее решение уравнения (7) в пространства $W_2^2(R_+; H)$ представляется в виде

$$u_0(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t A}\varphi_1 + e^{-\alpha(1-t)A}\varphi_2 \ , & t \in (0,1) \\ e^{-\beta A(1-t)}\varphi_3 \ , & t \in (1,\infty), \end{cases}$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \ , \varphi_3 \in H_{3/2}$. Из условия (8) следует, что

$$-\alpha A\varphi_1 + \alpha A e^{-\alpha A}\varphi_2 = 0 \quad . \tag{9}$$

Из условия $u(t) \in W_2^2(R_+; H)$ следует, что $u(1-0) = u(1+0)$, $u'(1-0) = u'(1+0)$, т.е.

$$\begin{cases} e^{-\alpha A}\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3 \ , \\ -\alpha A e^{-\alpha A}\varphi_1 + \alpha A\varphi_2 = \beta A\varphi_3 \ . \end{cases} \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} -\alpha A\varphi_1 + \alpha A e^{-\alpha A}\varphi_2 + 0\cdot\varphi_3 = 0 \ , \\ -e^{-\alpha A}\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = 0 \ , \\ -\alpha e^{-\alpha A}\varphi_1 + \alpha\varphi_2 + \beta\varphi_3 = 0 \ . \end{cases}$$

Так как основной определитель

$$\Delta_0(A) = \begin{vmatrix} -\alpha A & \alpha A e^{-\alpha A} & 0 \\ -e^{-\alpha A} & E & -E \\ -\alpha e^{-\alpha A} & \alpha E & \beta E \end{vmatrix}$$

обратим в пространстве H^3, то $\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$, следовательно, $u_0(t) = 0$.

С другой стороны, при $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+; H;1)$

$$\|P_0 u\|_{L_2}^2 = \left\| -\frac{d^2u}{dt^2} + \rho(t)A^2u \right\|_{L_2}^2 \le 2\left(\left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|_{L_2}^2 + \max\left(\alpha^4; \beta^4\right)\cdot \left\|A^2u\right\|_{L_2}^2 \right) \le const\|u\|_{W_2^2}^2 .$$

По теореме Банаха об обратном операторе, оператор P_0 имеет ограниченный обратный, т.е. P_0 является изоморфизмом $P_0^{-1} : L_2(R_+; H) \to \overset{o}{W}{}_2^2(R_+; H;0)$. Теорема доказана.

Лемма 1. Пусть выполняется условие 1). Тогда при любом $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$ имеет место неравенство:

$$\left\|\rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2 \geq \left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2 + \left\|\rho^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2}^2 + 2\cos 2\varepsilon\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2. \quad (11)$$

Доказательство. Умножая уравнение $P_0u = f$ на вектор функцию $\rho^{-1/2}(t)$ скалярно в $L_2(R_+;H)$ получаем:

$$\left\|\rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2 = \left\|-\rho^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2} + \rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2 = \left\|\rho^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2}^2 +$$

$$+\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{d^2u}{dt^2}, A^2u\right)_{L_2}. \quad (12)$$

При $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$ $\left(u'(0)=0\right)$, после интегрирования по частям имеем:

$$-2\operatorname{Re}\left(\frac{d^2u}{dt^2}, A^2u\right)_{L_2} = 2\operatorname{Re}\left(A^*\frac{du}{dt}, A\frac{du}{dt}\right)_{L_2} \geq 2\cos 2\varepsilon\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2.$$

Учитывая это неравенство в (12) получаем

$$\left\|\rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2 \geq \left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2 + \left\|\rho^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2}^2 + 2\cos 2\varepsilon\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполняется условие 1). Тогда при любом $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$ имеют место неравенства

$$\left\|A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq c_0(\varepsilon;\alpha;\beta)\left\|P_0u\right\|_{L_2(R_+;H)}^2, \quad (13)$$

$$\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq c_1(\varepsilon;\alpha;\beta)\left\|P_0u\right\|_{L_2(R_+;H)}^2, \quad (14)$$

где

$$c_0(\varepsilon;\alpha;\beta) = \frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)}\begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon < \pi/4, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \pi/4 \leq \varepsilon < \pi/2. \end{cases} \quad (15)$$

$$c_1(\varepsilon;\alpha;\beta) = \frac{1}{2\cos\varepsilon\,\min(\alpha;\beta)}, \qquad 0 \leq \varepsilon < \pi/2, \quad (16)$$

Доказательство. Пусть $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$. Тогда $u'(0)=0$. Интегрируя по частям и учитывая, что $u'(0)=0$, получаем:

$$\left\| C\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2 = \int_0^{+\infty}\left(C\frac{du}{dt}, C\frac{du}{dt}\right) dt = \int_0^{+\infty}\left(C^2u, \frac{d^2u}{dt^2}\right) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\rho^{1/2}C^2u, \rho^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2}\right) dt = -\left(\rho^{1/2}C^2u, \rho^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2}\right)_{L_2} .$$

Применяя неравенство Коши -Буняковского имеем:

$$\left\| A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{2}\left(\left\| \rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2 + \left\| \rho^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2}^2 \right) . \qquad (17)$$

Но из неравенства (11) (лемма 1) следует , что :

$$\left\| \rho^{-1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2 + \left\| \rho^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2}\right\| \le \left\| \rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2 - 2\cos 2\varepsilon \left\| A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2 .$$

Учитывая это неравенство в (17) получаем:

$$\left\| A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{2}\cdot\left(\left\| \rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2 - 2\cos 2\varepsilon \left\| A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\| \rho^{1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2 \right) - \cos 2\varepsilon \left\| A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2 .$$

Отсюда имеем, что при $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$

$$(1+\cos 2\varepsilon)\left\| A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{2}\cdot\left\| \rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2 ,$$

т.е.

$$\left\| A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{4\cos^2\varepsilon\cdot}\cdot\left\| \rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2 \le \frac{1}{4\cos^2\varepsilon\cdot}\cdot\max_t \rho^{-1/2}\left\| P_0u\right\|_{L_2}^2 .$$

Следовательно

$$\left\| A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2} \le \frac{1}{2\cos\varepsilon}\cdot\frac{1}{\min(\alpha;\beta)}\left\| P_0u\right\|_{L_2} .$$

Неравенство (14) доказано. Докажем неравенство (13). Рассмотрим сначала случай $0 \le \varepsilon \le \pi/4$, т.е. $\cos 2\varepsilon \ge 0$. Тогда из неравенства (11) следует, что

$$\left\| \rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2}^2 + \left\| \rho^{-1/2}P_0u\right\|_{L_2}^2 \le \left\| \rho^{-1}(t)P_0u\right\|_{L_2}^2 .$$

Отсюда имеем

$$\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2} \le \left\|\rho^{-1/2}P_0u\right\|^2_{L_2} \le \max_t \rho^{-1}\left\|P_0u\right\|^2_{L_2} \quad .$$

С другой стороны,

$$\left\|A^2u\right\|^2_{L_2} = \left\|\rho^{-1/2}\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2} \le \max_t \rho^{-1}(t)\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2} \le$$

$$\le \max_t \ \rho^{-2}(t)\left\|P_0u\right\|^2_{L_2} = \frac{1}{\min(\ \alpha^4;\beta^4)}\left\|P_0u\right\|^2_{L_2} \quad .$$

Таким образом , при $0 \le \varepsilon \le \pi/2$

$$\left\|A^2u\right\|_{L_2} \le \frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)}\left\|P_0u\right\|_{L_2} \ . \tag{18}$$

Теперь пусть $\pi/4 \le \varepsilon < \pi/2$. Тогда $\cos 2\varepsilon \le 0$. Из неравенства (11) следует , что:

$$\frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)}\left\|P_0u\right\|^2_{L_2} = \max \rho^{-1}(t)\left\|P_0u\right\|^2_{L_2} \ge \left\|\rho^{-1/2}P_0u\right\|^2_{L_2} \ge \left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2} +$$

$$+\left\|\rho^{-1/2}\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2_{L_2} + 2\cos 2\varepsilon\frac{1}{4\cos^2\varepsilon\min(\alpha^2;\beta^2)}\left\|P_0u\right\|^2_{L_2} .$$

Тогда

$$\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2} \le \frac{1}{\min(\ \alpha^2;\beta^2)}\left(1-\frac{\cos 2\varepsilon}{2\cos^2\varepsilon}\right)\left\|P_0u\right\|^2_{L_2} = \frac{1}{\min(\ \alpha^2;\beta^2)}\frac{1}{2\cos^2\varepsilon}\left\|P_0u\right\|^2_{L_2} .$$

С другой стороны,

$$\left\|A^2u\right\|^2_{L_2} = \left\|\rho^{1/2}\rho^{-1/2}A^2u\right\|^2_{L_2} \le \max_t \rho^{-1}(t)\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2} \le \frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)}\frac{1}{\min(\alpha^2;\beta^2)}\frac{1}{2\cos^2\varepsilon}\left\|P_0u\right\|^2_{L_2} ,$$

т.е. при $\pi/4 \le \varepsilon < \pi/2$

$$\left\|A^2u\right\|_{L_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\left\|P_0u\right\|_{L_2} . \tag{19}$$

Неравенства (18) и (19) показывают верность неравенства (14). Лемма доказана. Теперь мы докажем теорему о регулярной разрешимости краевой задачи (1), (2).

Теорема 2. Пусть оператор A удовлетворяет условию 1), а операторы $B_j = A_j A^{-j}$ $(j = 1,2)$ ограничены в H и имеет место неравенство

$$K(\varepsilon;\alpha;\beta) = \sum_{j=0}^{1} c_j(\varepsilon;\alpha;\beta)\left\|B_{2-j}\right\| < 1,$$

где числа $c_0(\varepsilon,\alpha,\beta), c_1(\varepsilon,\alpha,\beta)$ определены из леммы 2. Тогда краевая задача (1),(2) регулярно разрешима.

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 1 напишем краевую задачу (1),(2) в виде уравнения (3). По доказанной теореме 1 оператор $P_0 : \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1) \to L_2(R_+;H)$ является изоморфизмом. Тогда обратный оператор P_0^{-1} существует и ограничен. Следовательно, любому $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H;1)$ отвечает единственное $\vartheta(t) \in L_2(R_+;H)$: $\vartheta = P_0^{-1}u$ и получаем следующее уравнение в пространстве $L_2(R_+;H)$:

$$\vartheta + P_1 P_0^{-1}\vartheta = f \ . \qquad (20)$$

Покажем, что

$$\left\|P_1 P_0^{-1}\right\|_{L_2(R_+;H)\to L_2(R_+;H)} < 1.$$

Для любого $\vartheta(t) \in L_2(R_+;H)$ имеем

$$\left\|P_1 P_0^{-1}\vartheta\right\|_{L_2} = \left\|P_1 u\right\|_{L_2} = \left\|A_1\frac{du}{dt} + A_2 u\right\|_{L_2} \le \left\|A_1\frac{du}{dt}\right\|_{L_2} + \left\|A_2 u\right\|_{L_2} = \left\|A_1 A^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2} +$$

$$+ \left\|A_2 A^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|A^2 u\right\|_{L_2} = \left\|B_1\right\|\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2} + \left\|B_2\right\|\left\|A^2 u\right\|_{L_2}.$$

Из леммы 2 получаем:

$$\left\|P_1 P_0^{-1}\vartheta\right\|_{L_2} \le K(\varepsilon,\alpha;\beta)\left\|\vartheta\right\|_{L_2},$$

т.е.

$$\left\|P_1 P_0^{-1}\right\|_{L_2(R_+;H)\to L_2(R_+;H)} < 1.$$

Тогда из уравнения (20) следует, что

$$\vartheta = \left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f \ .$$

и

$$u = P_0^{-1}\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f \ .$$

Отсюда следует, что

$$\left\|u\right\|_{W_2^2} \le const(\varepsilon,\alpha;\beta)\left\|f\right\|_{L_2}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., Мир, 1971, 371 с.
2. Мирзоев С.С., Алиев А.Р. Об одной краевой задаче для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. Труды Института Математики и Механики НАН Азербайджана, VI (XIV), 1997, с.117-121.
3. Рустамова Л.А. О регулярной разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка. Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, 2005, № 1, с.43-51.

İKİNCİ TƏRTİB OPERATOR DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

L.Ə.RÜSTƏMOVA

XÜLASƏ

Məqalədə baş hissəsinə spektri müəyyən oblastda yerləşən normal operator daxil olduqda, ikinci tərtib operator-diferensial tənlik üçün qoyulmuş bir sərhəd məsələsinin requlyar həll olunma şərtləri tapılmışdır.

ON A SOLVABILITY OF THE A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SECOND ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION

L.A.RUSTAMOVA

SUMMARY

In the paper the condition of regular solvability is found for the a boundary value problem for the second order operator differential equation. The main part of the equation includes normal operator the spectrum of which replaces in some certain sector.